

# Horizontales Masse-Feder Pendel mit Reibung

Version vom

17. Juni 2013

## Überblick

In den nachfolgenden beiden Aufgaben soll ein Regelkreis mit PI - Regler, wobei die Regelstrecke ein horizontales Masse-Feder Pendel ist, behandelt werden. Hierbei ist auch die Reibung der Masse mit der Unterlage zu berücksichtigen. Geregelt werden soll dabei die Position der Masse. Bei geeigneter Wahl der Parameter kann dabei der sogenannte *slip-stick* Effekt beobachtet werden. Dieser entsteht dadurch, dass in einem ersten Anlauf der P-Anteil des Reglers bewirkt, dass die Masse schlagartig auslenkt und sich in die Nähe der gewünschten Auslenkung begibt. Wird nach diesem ersten Auslenken die Geschwindigkeit z.B. beim Umkehren der Bewegungsrichtung gleich 0 und die, auf die Masse wirkenden Kräfte (Federkraft + Stellgröße) können die maximale Haftreibungskraft in diesem Augenblick nicht überwinden, so bleibt die Masse stehen und es bleibt eine gewisse konstante Regelabweichung.

Daraufhin integriert der I-Anteil des Reglers diese Regelabweichung so lange auf, bis die Stellgröße die maximale Haftreibungskraft überschreitet und sich die Masse neuerlich in Bewegung setzt. Da nun, bei bewegter Masse, Gleitreibung auftritt, sinkt die Reibungskraft schlagartig, wodurch die Masse wieder "über das Ziel hinauschießt" und das ganze Spiel von vorne beginnt. Abbildung 1 zeigt das Verhalten des Masse-Feder Pendels, wenn es durch einen PI-Regler positionsgeregelt wird. Wie im linken oberen Diagramm deutlich zu sehen ist, tritt hier der *slip-stick* Effekt auf. Die beiden unteren Diagramme zeigen den zeitlichen Verlauf der einzelnen Kraftkomponenten. Die roten horizontalen Linien im Diagramm rechts unten markieren den maximalen Haftreibungswiderstand  $r_H$ . Man sieht, dass, während die Masse still steht, die Kraft linear ansteigt bzw. abfällt. Dies wird durch den I-Anteil des Reglers, der die konstante Regelabweichung aufintegriert, bewirkt. Erreicht die, auf die Masse wirkende Kraft, die Grenze des Haftreibungswiderstandes, so setzt sich die Masse schlagartig in Bewegung und bleibt wieder jenseits des Sollwertes  $x_{sp} = 0.1m$  liegen, woraufhin das Ganze von vorne beginnt.

Als Reibungsmodell sollen zwei verschiedene Ansätze implementiert werden.

1. Im ersten Ansatz sind zwei verschiedene Zustände zu unterscheiden:

- a) die Masse befindet sich in Bewegung  $\rightarrow$  Gleitreibung
- b) die Masse steht still  $\rightarrow$  Haftreibung

D.h. es gibt auch zwei verschiedene Reibungsmodelle, zwischen denen bei der Simulation, je nach Bewegungszustand der Masse, hin und her geschaltet wird. Spezielle Ereignisse wie z.B. der Nulldurchgang des Geschwindigkeitsverlaufes der Masse lösen einen solchen Modellwechsel aus. Es handelt sich also um eine ereignisgesteuerte Simulation.

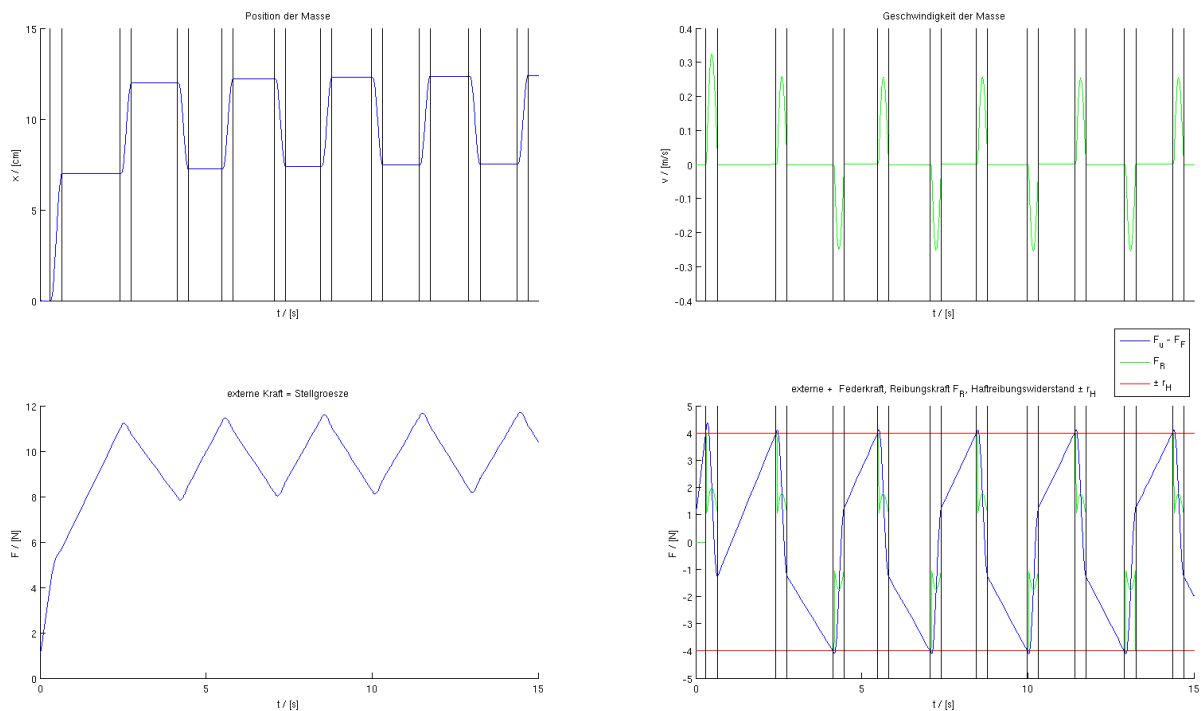


Abbildung 1: Horizontales Masse-Feder Pendel, positionsgeregelt durch einen PI-Regler. Die Reibung wird hier mittels ereignisgesteuertem Modell simuliert. D.h. zwei separate Modelle, eines für Haftreibung und eines für Gleitreibung, werden verwendet.

2. Im zweiten Ansatz soll das sogenannte LuGre-Reibungsmodell implementiert werden, benannt nach den beiden Städten in denen es entwickelt wurde: Lund und Grenoble. In der anschaulichen Modellvorstellung die hierbei verwendet wird, nimmt man an, dass die aneinander reibenden Flächen Borsten gleich einer Bürste haben. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass auch jede noch so glatte Oberfläche im mikroskopischen Bereich Unebenheiten aufweist. Im LuGre-Modell ist der Übergang zwischen Haft und Gleitreibung ein kontinuierlicher, wodurch man keine Modellschaltung mehr benötigt.

## 1 ereignisgesteuertes Modell

### 1.1 Modell

Beim ereignisgesteuerten Modell soll die Reibungskraft  $F_R$  der Masse mit der Unterlage, abhängig von der Geschwindigkeit  $v$  der Masse und der absoluten Größe, der auf die Masse einwirkende Kraft  $F_u - F_F$ , entweder in einem Modell für Haftreibung oder in einem Modell für Gleitreibung berechnet werden.

Dabei entspricht die Haftreibungskraft immer genau der negativen, auf die Masse wirkenden Kraft  $-(F_u - F_F)$ , solange diese den Wert  $r_H$  nicht überschreitet, also  $r_H > |F_u - F_F|$  gilt.

Die Reibungskraft im Gleitreibungsmodell setzt sich aus einer konstanten Komponente  $r_C$  (Coulombsche Komponente, Trockenreibung), einer geschwindigkeitsproportionalen Komponente  $r_v \cdot v$  (viskose Gleitreibung) und der exponentiell abklingenden Haftreibungskomponente  $(r_H - r_C)e^{-(\frac{v}{v_S})^2}$  zusammen. Die Abklinggeschwindigkeit der Haftreibung kann dabei mittels der sogenannten

*Stribeck-Geschwindigkeit*  $v_S$  eingestellt werden. Das Diagramm in Abbildung 2 zeigt die einzelnen Reibungskomponenten und die Summe  $F_R$  der einzelnen Komponenten in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $v$ .

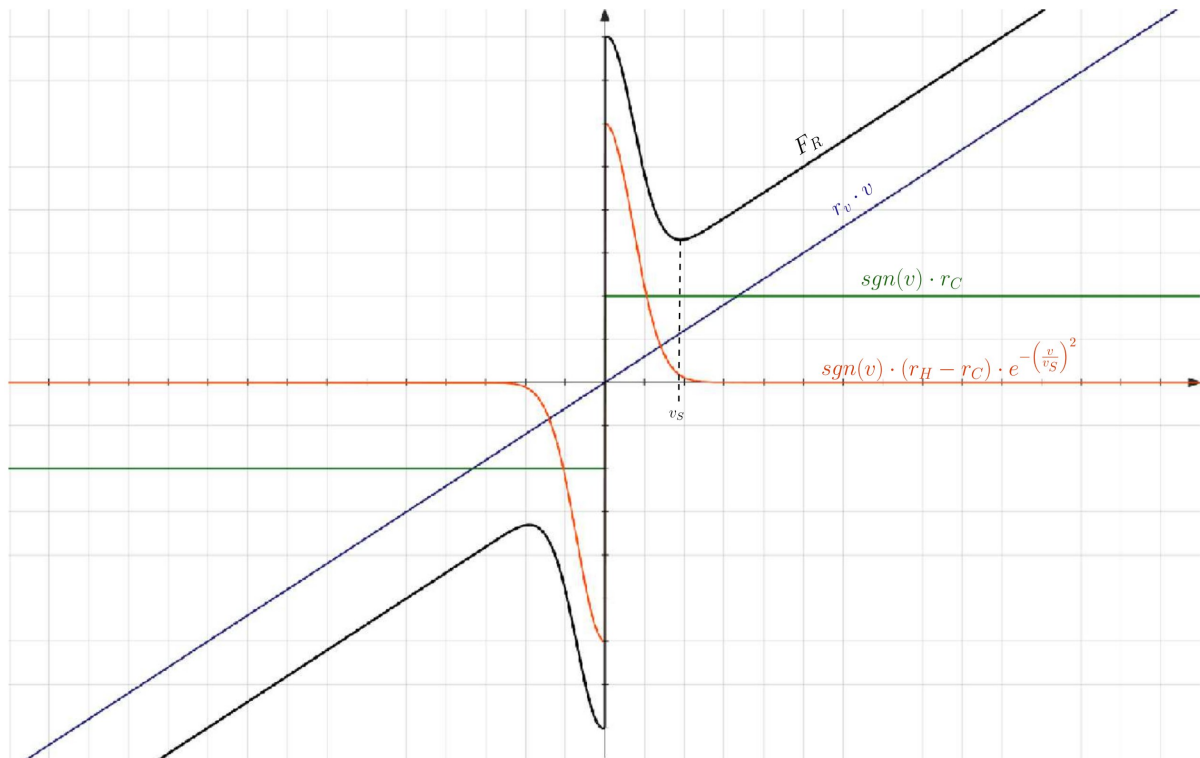


Abbildung 2: Die einzelnen Komponenten der Reibungskraft in Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Masse.

Die Ereignisse, die einen Modellwechsel bewirken sind wie folgt definiert:

- Haftreibung  $\mapsto$  Gleitreibung:

$$|F_{ext}| = |F_u - F_F| > r_H \quad (1)$$

- Gleitreibung  $\mapsto$  Haftreibung:

$$v = 0 \quad \wedge \quad |F_u - F_F| \leq r_H \quad (2)$$

Die Ausgangsbasis zur Entwicklung der Modellgleichungen liefert das dritte Newton'sche Axiom (Kräftegleichgewicht):  $F = m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_R + F_u = -c \cdot x - F_R + F_u$  wobei  $c$  die Federkonstante,  $F_R$  die Reibungskraft und  $F_u$  die von Außen angelegte Kraft ist.  $F_u$  entspricht der Stellgröße im Regelkreis und ist Null, falls nur die Regelstrecke modelliert wird. Im Haftreibungszustand ist  $F_R$  genau so groß, dass die resultierende Kraft  $F$  gleich 0 ist, solange  $|F_R|$  dafür die maximale Haftreibungskraft  $r_H$  nicht überschreiten muss.

- Haftreibung:

$$\dot{x} = 0 \quad (3)$$

$$\dot{v} = 0 \quad (4)$$

- Gleitreibung

$$\dot{x} = v \quad (5)$$

$$\dot{v} = -\frac{c}{m} \cdot x - \operatorname{sgn}(v) \cdot \frac{r_C}{m} - \frac{r_v}{m} \cdot v - \operatorname{sgn}(v) \cdot \frac{r_H - r_C}{m} \cdot e^{-\left(\frac{v}{v_S}\right)^2} + \frac{1}{m} \cdot F_u \quad (6)$$

- PI-Regler

Bei der Realisierung des geregelten Masse-Feder Pendels muss das, das Modell beschreibende Differentialgleichungssystem (3) - (6) um folgende Gleichung erweitert werden:

$$\dot{F}_u = K_p \cdot (-v) + \frac{K_p}{T_N} \cdot (x_{sp} - x) \quad (7)$$

### 1.1.1 Parameterwahl

Als Masse  $m$  wird 1 kg gewählt. Für die Federkonstante  $c$  wählen wir  $100 \frac{N}{m}$ . Das bedeutet, dass eine Masse von 1 kg die Feder um ca. 10 cm dehnen würde, falls sie auf der vertikal ausgerichteten Feder hängen würde. Die Werte für  $r_v$ ,  $r_C$ ,  $r_H$  und  $v_S$  wurden aus [KUGI99, 1.4 Positionierung mit Haftreibung] entnommen.

Im folgenden ein paar Parameter - Vorschläge:

$t_{end}$ [s]	$x_0$ [m]	$v_0$ [m/s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_v$ [Ns/m]	$r_H$ [N]	$v_S$ [m/s]
10	0	0	100	1	1	3	4	0.01

$t_{end}$ [s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_v$ [Ns/m]	$r_H$ [N]	$v_S$ [m/s]	$K_p$ [N/m]	$T_N$ [s]	$x_{sp}$ [m]
15	100	1	1	3	4	0.01	10	0.1	0.1

$t_{end}$ [s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_v$ [Ns/m]	$r_H$ [N]	$v_S$ [m/s]	$K_p$ [N/m]	$T_N$ [s]	$x_{sp}$ [m]
15	100	1	1	3	4	0.01	1000	1	0.1

## 2 LuGre - Modell

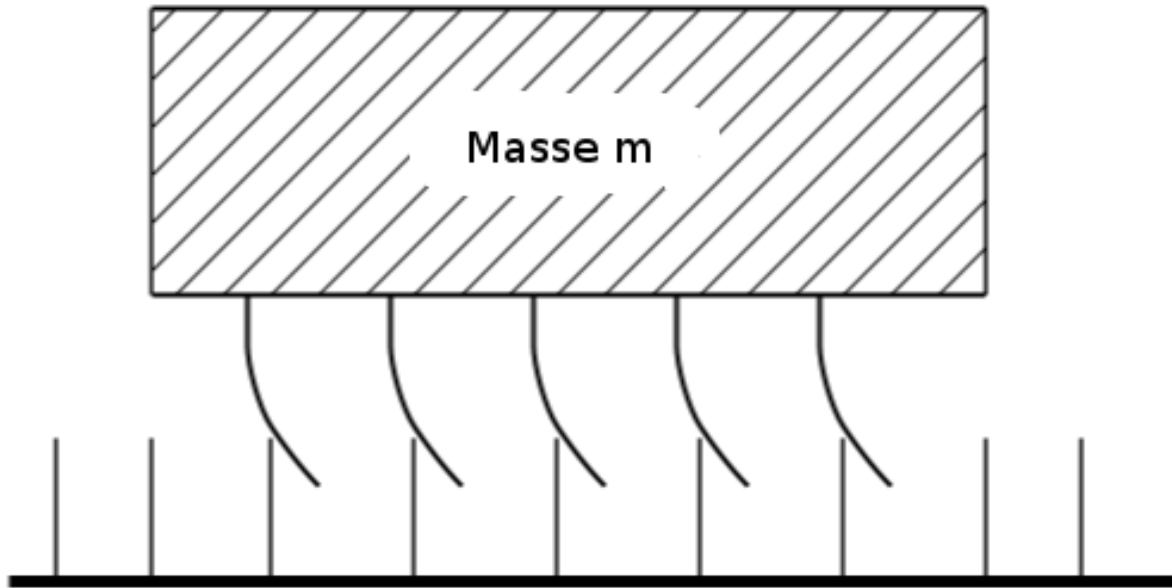


Abbildung 3: Das Prinzip des LuGre - Reibungsmodells.

Das LuGre - Reibungsmodell beruht auf der Vorstellung, dass die beiden aufeinander reibenden Oberflächen im mikroskopischen Bereich wie Bürsten aussehen. Das heißt, die einzelnen Unebenheiten werden durch kleine Borsten mit Federeigenschaften modelliert. Zur Modellvereinfachung betrachtet man nur eine einzelne Borste, deren Eigenschaften den, über alle Borsten gemittelten Eigenschaften entsprechen sollen. Es entsteht somit ein zusätzlicher Parameter  $z$ , die aktuelle Auslenkung der Borste, der in das Modell einfließt.

### 2.1 Modell

Folgendes Differentialgleichungssystem beschreibt das Masse-Feder Pendel unter Verwendung des LuGre - Reibungsmodells:

$$\dot{x} = v \quad (8)$$

$$\dot{v} = -\frac{c}{m} \cdot x - \frac{\sigma_0}{m} \cdot z - \frac{\sigma_1}{m} \cdot \dot{z} - \frac{\sigma_2}{m} \cdot v + \frac{1}{m} \cdot F_u \quad (9)$$

$$\dot{z} = v - \frac{|v|}{r_C + (r_H - r_C) \cdot e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}} \cdot \sigma_0 \cdot z \quad (10)$$

Die Parameter haben dabei folgende Bedeutung:

- $\sigma_0$  ... Steifheit der Borsten [N/m] (typische Werte liegen im Intervall  $[10^3, 10^5]$ )
- $\sigma_1$  ... Dämpfungskoeffizient der Borste [Ns/m] (typischer Wert:  $\sqrt{2 \cdot \sigma_0 \cdot m}$ )
- $\sigma_2$  ... viskoser Reibungskoeffizient [Ns/m] (entspricht dem Parameter  $r_v$  im ereignisgesteuerten Modell)
- $r_H$  ... maximale Haftreibungskraft [N]

- $r_C$  ... konstanter Anteil der Gleitreibungskraft [N] (= Coloumbscher Anteil, Trockenreibung)
- $v_s$  ... Stribeckgeschwindigkeit [m/s]

Bei der Realisierung des geregelten Masse-Feder Pendels muss das, das Modell beschreibende Differentialgleichungssystem (8)-(10) wiederum um folgende Gleichung erweitert werden:

$$\dot{F}_u = K_p \cdot (-v) + \frac{K_p}{T_N} \cdot (x_{sp} - x) \quad (11)$$

### 2.1.1 Parameterwahl

Um eine bessere Vergleichbarkeit mit dem ereignisgesteuerten Modell herzustellen, werden alle Parameter, welche beiden Modellen eigen sind, gleich gelassen. Der neue Parameter  $\sigma_2$  entspricht, wie bereits erwähnt, dem Parameter  $r_v$  im ereignisgesteuerten Modell und beeinflusst daher die viskose Reibung.  $\sigma_0$  beschreibt die Steifheit der Borsten und  $\sigma_1$  stellt einen Dämpfungskoeffizienten dar. Laut [LUGRE2, 2.2.1 Dynamische Modellierung und das LuGre-Modell] kann  $\sigma_0$  im Intervall  $[10^3, 10^5]$  gewählt werden und für  $\sigma_1$  stellt dann  $2 \cdot \sqrt{\sigma_0 \cdot m}$  einen sinnvollen Wert dar. Es folgen wieder einige Parameter-Vorschläge:

$t_{end}$ [s]	$x_0$ [m]	$v_o$ [m/s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]
10	0	0	100	1	1	4	$10^5$	3	0.01

$t_{end}$ [s]	$x_0$ [m]	$v_o$ [m/s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]
10	0	0	100	1	1	4	$10^3$	3	0.01

$t_{end}$ [s]	$x_0$ [m]	$v_o$ [m/s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]
10	0	0	100	1	1	4	9000	3	0.01

$t_{end}$ [s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]	$K_p$ [N/m]	$T_N$ [s]	$x_{sp}$ [m]
15	100	1	1	4	$10^5$	3	0.01	10	0.1	0.1

$t_{end}$ [s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]	$K_p$ [N/m]	$T_N$ [s]	$x_{sp}$ [m]
15	100	1	1	4	$10^3$	3	0.01	10	0.1	0.1

$t_{end}$ [s]	$c$ [N/m]	$m$ [kg]	$r_C$ [N]	$r_H$ [N]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$v_S$ [m/s]	$K_p$ [N/m]	$T_N$ [s]	$x_{sp}$ [m]
15	100	1	1	4	$10^5$	3	0.01	1000	1	0.1

### 3 Aufgabenstellung

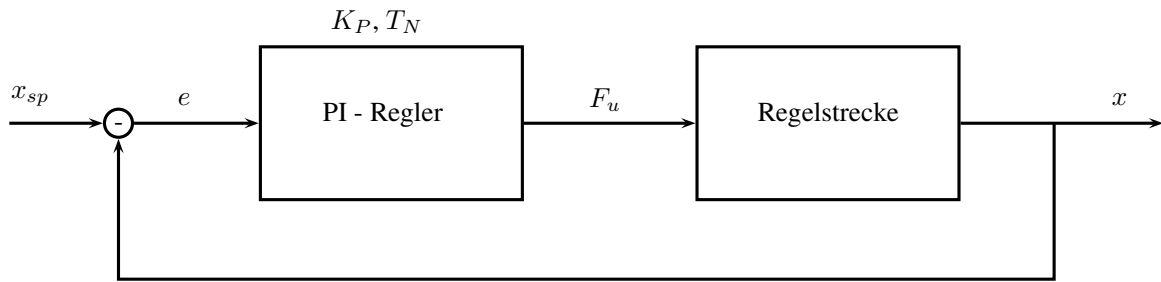


Abbildung 4: Der zu implementierende Regelkreis.  $e = x_{sp} - x$

- Implementieren Sie das Masse-Feder Pendel unter Verwendung des ereignisgesteuerten Modells in Octave. Implementieren Sie zuerst nur die Regelstrecke und messen Sie die Sprungantwort und die Rampenantwort. Versuchen Sie Parameter zu finden, bei denen bereits bei der Rampenantwort der *slip-stick* Effekt beobachtbar ist.
  - Erweitern Sie das Modell um einen PI-Regler, der die Position der Masse regeln soll. Versuchen Sie auch hier Parameter zu finden, bei denen der *slip-stick* Effekt auftritt.
  - Dokumentieren Sie die Octave - Implementation und Messergebnisse. Vergleichen Sie die dabei erhaltenen Messergebnisse mit jenen, welche die Matlab - Implementierung am MMT-Server liefert.
- Implementieren Sie das Masse-Feder Pendel unter Verwendung des LuGre - Reibungsmodells in Octave. Implementieren Sie zuerst nur die Regelstrecke und messen Sie die Sprungantwort und die Rampenantwort. Versuchen Sie Parameter zu finden, bei denen bereits bei der Rampenantwort der *slip-stick* Effekt beobachtbar ist.
  - Erweitern Sie das Modell um einen PI-Regler, der die Position der Masse regeln soll. Versuchen Sie auch hier Parameter zu finden, bei denen der *slip-stick* Effekt auftritt.
  - Dokumentieren Sie die Octave - Implementation und Messergebnisse. Vergleichen Sie die dabei erhaltenen Messergebnisse mit jenen, welche die Matlab - Implementierung am MMT-Server liefert.

**Octave** GNU - Octave ist eine Interpreter-Sprache, primär dazu gedacht, numerische Berechnung durchzuführen (siehe <http://www.gnu.org/software/octave/>). Die Ähnlichkeit zu Matlab ist dabei so groß, dass die viele Matlab-Programme 1:1 auch in Octave laufen. Die Standardinstallation beinhaltet nur einen Kern an wesentlichen Bibliotheken. Eine Vielzahl an weiteren Paketen werden unter <http://octave.sourceforge.net/> angeboten. Zum numerischen Lösen von Differentialgleichungen wird das Paket **odepkg** benötigt. Eine ausführliche Dokumentation zu diesem Paket findet sich in dem File *odepkg.pdf*.

## Literatur

[KUGI99] SKRIPTUM NICHTLINEARE SYSTEME I:

Andreas Kugi TU Wien  
Stand SS 2009

[LUGRE1] ON THE LUGRE MODEL AND FRICTION-INDUCED HYSTERESIS:

Ashwani K. Padthe, JinHyoung Oh, and Dennis S. Bernstein  
Department of Aerospace Engineering, The University of Michigan

[LUGRE2] MODELLIERUNG UND SIMULATION NICHTLINEARER MOTOREIGENSCHAFTEN:

Matthias Kubisch  
Humboldt Universität zu Berlin, Institut für Informatik, Studienarbeit, 16. Juni 2008