Fakultät Informationstechnik
Prof. Dr. Peter Väterlein

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Modellbildung und Simulation
Laborübung 4: Planetenbewegungen

Einführung

Die Bewegung von Planeten um einen Zentralstern wird durch das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

bestimmt. Die Kraft ***F***, die der Zentralstern auf den Planeten ausübt, ist abhängig von den Massen des Planeten *m* und die des Zentralsterns *M*. Zudem hängt sie vom Abstand |***r***| zwischen Stern und Planeten ab. Die Gravitationskonstante hat den Wert $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 / (\mathrm{kg\ s}^2)$.

In dieser Laborübung sollen die Bewegungen der Planeten Erde und Mars um die Sonne in MATLAB simuliert und studiert werden.

Die Bewegung der Planeten soll in einer Ebene (die Astronomen nennen diese Ebene „Ekliptik“) stattfinden. Die Position des Planeten ist damit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Die Sonne soll im Ursprung fixiert sein. Die Differentialgleichung für die Bewegung eines Planeten lautet damit

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -G \frac{M}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

oder in Koordinaten geschrieben

$$\ddot{x} = -\frac{G \cdot M}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \cdot x$$

$$\ddot{y} = -\frac{G \cdot M}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \cdot y$$

Ihre Aufgaben

1. Ergänzen Sie das Matlab-Programm `planet_1_raw.m`, das Sie auf moodle finden, um die Bewegung der Erde um die Sonne zu simulieren. Einige Größen, die Sie brauchen, sind schon im Programm enthalten, so die Masse der Sonne ($1{,}998 \cdot 10^{30}$ kg) und der Erde ($5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg). Andere Größen müssen Sie noch eintragen (Vorsicht bei den Einheiten):

   Der mittlere Abstand Sonne – Erde, die so genannte Astronomische Einheit beträgt 149,6 Mio. km. Wählen Sie als Startposition für Ihre Simulation den sonnenfernsten Punkt der Erdbahn (das so genannte „Aphel“), in dem die Erde einen Abstand von 1,017 AE zur Sonne hat. Die Bahngeschwindigkeit der Erde an diesem Punkt beträgt 29,28 km/s (senkrecht zur Verbindungslinie Erde – Sonne).

Simulieren Sie die Erdbahn für etwas mehr als ein Jahr (400 Tage). Stellen Sie neben der Bahnkurve, die bereits im Programm angelegt ist, auch die x- und y-Werte in Abhängigkeit von der Zeit dar. Auf diese Weise können Sie herausfinden, wie lange ein Jahr in Ihrer Simulation dauert. Die Zeit auf der x-Achse soll in Tagen angegeben werden.

2. Fügen Sie eine Codezeile in das Programm ein, das die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} m \left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{\left|\vec{r}\right|}$$

berechnet. Nach dem ersten Keplerschen Gesetz bewegen sich die Planeten auf Ellipsenbahnen, wenn die Gesamtenergie $E < 0$ ist, auf Hyperbelbahnen, wenn $E > 0$ und auf Parabelbahnen, wenn $E = 0$ ist. Verifizieren Sie, dass die Erde tatsächlich eine negative Gesamtenergie hat.

3. Unser nächster Nachbar im Sonnensystem (abgesehen von unserem eigenen Mond) ist der Planet Mars. Er hat eine Masse von $6{,}419 \cdot 10^{23}$ kg und einen mittleren Abstand von der Sonne von 1,524 AE. Die Marsbahn ist etwas elliptischer als die Erdbahn. Der sonnennächste Punkt („Perihel") ist 1,381 AE von der Sonne entfernt, der sonnenfernste („Aphel") 1,666 AE. Die Bewegung der Planeten Erde ($r_1(t)$) und Mars ($r_2(t)$) wird nicht nur von der Schwerkraft der Sonne, sondern auch von der Massenanziehung zwischen den Planeten bestimmt. Die Differentialgleichungen lauten damit

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_1 &= -G \cdot \frac{M}{\left|\vec{r}_1\right|^3} \cdot \vec{r}_1 - G \cdot \frac{m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
\ddot{\vec{r}}_2 &= -G \cdot \frac{M}{\left|\vec{r}_2\right|^3} \cdot \vec{r}_2 - G \cdot \frac{m_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)
\end{aligned}$$

Ergänzen Sie dazu die Programmvorlage `planet_2_raw.m`, die Sie auf moodle finden. Als Startwerte für den Mars nutzen Sie den Abstand im Aphel und als Bahngeschwindigkeit 22,05 km/s (senkrecht zur Verbindungslinie Sonne – Mars). Wählen Sie die Anfangsbedingungen so, dass Sonne, Erde und Mars auf einer Linie liegen (Astronomen nennen so etwas eine „Konjunktion").

4. Stellen Sie die Abstände der Planeten Erde und Mars in Abhängigkeit von der Zeit über einen Zeitraum von 1000 Tagen dar. Verwenden Sie die Astronomische Einheit als Einheit. Stellen Sie in einemseparaten Koordinatensystem die Phase

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

der beiden Planetenbahnen dar.

5. Validieren und verifizieren Sie Ihre Simulation, indem Sie die berechneten Größen mit den aus der Literatur bekannten Werten vergleichen
   a. Wie lange dauern die „siderischen" Jahre beider Planeten (d.h. ein kompletter Umlauf des Planeten um die Sonne?
   b. Ist das dritte Keplersche Gesetz erfüllt (die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen)?
   c. Wie stark unterscheiden sich Aphel und Preihel der Planeten?

d. Wie lange ist die „synodische Umlaufzeit“ des Mars, d.h. wie lange dauert es von einer Konjunktion zur nächsten (Tipp: Sie können das ganz einfach aus dem Phasendiagramm ablesen).

Testat

Um das Testat für den Laborversuch zu bekommen, müssen Sie einen schriftlichen Bericht (in elektronischer Form als pdf-Datei) abgeben, d.h. auf moodle hochladen. Dieser Bericht muss die aus den vorigen Laborversuchen bekannten Kriterien erfüllen.

Jeder Bericht wird mit 0, 1 oder zwei Punkten bewertet. Dabei bedeuten

- **0 Punkte:** das war nix, Nachbesserungen sind notwendig
- **1 Punkt:** Minimallösung, schlampige Durchführung und/oder Darstellung des Labors. Geben mehrere Studierende übereinstimmende Berichte ab, erhält jede/-r maximal einen Punkt. Auch für verspätet eingehende Berichte gibt es maximal einen Punkt.
- **2 Punkte:** Aufgaben sauber gelöst und gut dargestellt. Die eigene Leistung des/der Autors/Autorin ist erkennbar.

Für die Ausarbeitung haben Sie zwei Wochen Zeit. Letzter Abgabetermin ist Dienstag, 24. Mai 2016.