

restart;

with(CodeGeneration) :

with(LinearAlgebra) :

with(PolynomialTools) :

with(VectorCalculus) :

Systemvariablen

Masse:

$m := 1;$

1

(1)

Dämpfer:

$d := 2;$

2

(2)

Feder:

$c := 2;$

2

(3)

Bewegungsgleichung - Einlassventil

Kräfte

$Ft := mEV \cdot \text{diff}(\text{diff}(yEV(t), t), t)$

$$mEV \left(\frac{d^2}{dt^2} yEV(t) \right)$$

(4)

$Fc := cEV \cdot yEV$

$$cEV yEV$$

(5)

$Fd := dEV \cdot \text{diff}(yEV(t), t)$

$$dEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right)$$

(6)

$Fp := AEV \cdot p(t)$

$$AEV p(t)$$

(7)

Kräftegleichgewicht

$gl(1) := -Ft - Fr - Fzyl - Fc - Fd + Fp = 0$

$$-mEV \left(\frac{d^2}{dt^2} yEV(t) \right) - Fr - Fzyl - cEV yEV - dEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right) + AEV p(t)$$

(8)

=0

$$\text{diff}(\text{diff}(yEV(t), t), t) = \text{solve}(gl(1), \text{diff}(\text{diff}(yEV(t), t), t))$$

$$\frac{d^2}{dt^2} yEV(t) = \frac{AEV p(t) - dEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right) - cEV yEV - Fr - Fzyl}{mEV} \quad (9)$$

Bewegungsgleichung - Hydraulik

Volumenänderung

$$dV := V0 - ANW \cdot yNW + AEV \cdot yEV$$

$$AEV yEV - ANW yNW + V0 \quad (10)$$

Volumenstrom

$$Q := ySV(t) \cdot Bv \cdot \text{sqrt}(p(t) - pT)$$

$$ySV(t) Bv \sqrt{p(t) - pT} \quad (11)$$

Druckänderung

$$gl(3) := \text{simplify} \left(\text{diff}(p(t), t) = \frac{E}{dV} \cdot (Q - (ANW \cdot \text{diff}(yNW(t), t) + AEV \cdot \text{diff}(yEV(t), t))) \right)$$

$$\frac{d}{dt} p(t) =$$

$$- \frac{E \left(-ySV(t) Bv \sqrt{p(t) - pT} + AEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right) + ANW \left(\frac{d}{dt} yNW(t) \right) \right)}{AEV yEV - ANW yNW + V0} \quad (12)$$

Zustands-Einführung

$$x1 = yEV$$

$$x1 = yEV \quad (13)$$

$$x2 = dyEV$$

$$x2 = dyEV \quad (14)$$

$$x3 = p$$

$$x3 = p \quad (15)$$

$$dx1 := x2$$

$$x2 \quad (16)$$

$$dx2 := \text{solve}(gl(1), \text{diff}(\text{diff}(yEV(t), t), t))$$

$$\frac{AEV p(t) - dEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right) - cEV yEV - Fr - Fzyl}{mEV} \quad (17)$$

$$dx3 := \text{simplify} \left(\frac{E}{dV} \cdot (Q - (ANW \cdot \text{diff}(yNW(t), t) + AEV \cdot \text{diff}(yEV(t), t))) \right)$$

$$\frac{E \left(-ySV(t) Bv \sqrt{p(t) - pT} + AEV \left(\frac{d}{dt} yEV(t) \right) + ANW \left(\frac{d}{dt} yNW(t) \right) \right)}{AEV yEV - ANW yNW + V0} \quad (18)$$

$$gl(4) := \text{subs}(p(t) = x3, yEV = x1, \text{diff}(x1(t), t) = x2, dx2)$$

$$\frac{AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl}{mEV} \quad (19)$$

$$gl(5) := \text{subs}(p(t) = x3, yEV = x1, \text{diff}(x1(t), t) = x2, ySV(t) = u1, \text{diff}(yNW(t), t) = du2, yNW = u2, dx3)$$

$$\frac{E \left(-u1 Bv \sqrt{x3 - pT} + AEV x2 + ANW du2 \right)}{AEV x1 - ANW u2 + V0} \quad (20)$$

Nichtlineares Zustandsraummodell

$$dx := \text{Matrix}([[dx1], [gl(4)], [gl(5)]])$$

$$\begin{bmatrix} x2 \\ \frac{AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl}{mEV} \\ -\frac{E \left(-u1 Bv \sqrt{x3 - pT} + AEV x2 + ANW du2 \right)}{AEV x1 - ANW u2 + V0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$dxLIN := \text{Matrix}([[\text{diff}(dx(1), x1), \text{diff}(dx(1), x2), \text{diff}(dx(1), x3)], [\text{diff}(dx(2), x1), \text{diff}(dx(2), x2), \text{diff}(dx(2), x3)], [\text{diff}(dx(3), x1), \text{diff}(dx(3), x2), \text{diff}(dx(3), x3)]])$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{cEV}{mEV}, -\frac{dEV}{mEV}, \frac{AEV}{mEV} \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{E \left(-u1 Bv \sqrt{x3 - pT} + AEV x2 + ANW du2 \right) AEV}{(AEV x1 - ANW u2 + V0)^2}, \\ - \frac{E AEV}{AEV x1 - ANW u2 + V0}, \frac{1}{2} \frac{E u1 Bv}{\sqrt{x3 - pT} (AEV x1 - ANW u2 + V0)} \end{array} \right]$$

Alin := subs(*x1* = 0, *x2* = 0, *x3* = 0, *u1* = 0, *u2* = 0, *du2* = 0, *dxLIN*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{cEV}{mEV} & -\frac{dEV}{mEV} & \frac{AEV}{mEV} \\ 0 & -\frac{E AEV}{V0} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Blin := Matrix([[diff(*dx*(1), *u1*), diff(*dx*(1), *u2*), diff(*dx*(1), *du2*)],
[diff(*dx*(2), *u1*), diff(*dx*(2), *u2*), diff(*dx*(2), *du2*)], [diff(*dx*(3), *u1*),
diff(*dx*(3), *u2*), diff(*dx*(3), *du2*)])])

$$\left[\begin{array}{l} 0, 0, 0 \end{array} \right], \quad (24)$$

$$\left[\begin{array}{l} 0, 0, 0 \end{array} \right],$$

$$\left[\frac{E Bv \sqrt{x3 - pT}}{AEV x1 - ANW u2 + V0}, \right.$$

$$\left. - \frac{E \left(-u1 Bv \sqrt{x3 - pT} + AEV x2 + ANW du2 \right) ANW}{(AEV x1 - ANW u2 + V0)^2}, \right.$$

$$\left. - \frac{E ANW}{AEV x1 - ANW u2 + V0} \right]$$

Blin := subs(*x1* = 0, *x2* = 0, *x3* = 0, *Blin*)

$$\left[\begin{array}{l} 0, 0, 0 \end{array} \right], \quad (25)$$

$$\left[\begin{array}{l} 0, 0, 0 \end{array} \right],$$

$$\left[\frac{E Bv \sqrt{-pT}}{-ANW u2 + V0}, - \frac{E \left(-u1 Bv \sqrt{-pT} + ANW du2 \right) ANW}{(-ANW u2 + V0)^2}, - \frac{E ANW}{-ANW u2 + V0} \right]$$

]]

Umsetzen von Maple- in Matlab-Code

Matlab(dx)

```
cg = [x2; (AEV * x3 - cEV * x1 - dEV * x2 - Fr - Fzyl) / mEV; -E
* (-u1 * Bv * sqrt(x3 - pT) + AEV * x2 + ANW * du2) / (AEV * x1 -
ANW * u2 + V0)];
```

```
#Bv:=1;
```

```
#pT:=1·105;
```

```
#AEV:=0.5·10-4;
```

```
#ANW:=0.5·10-4;
```

```
#V0:=5·10-7;
```

```
#dEV:=1000;
```

```
#cEV:=2;
```

```
#mEV:=0.05;
```

```
#E:=100;
```

```
#Fr:=0;
```

```
#Fzyl:=0;
```

```
fx := simplify(subs(u1 = 0, u2 = 0, du2 = 0, dx))
```

$$\left[\begin{array}{c} x2 \\ \frac{AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl}{mEV} \\ - \frac{E AEV x2}{AEV x1 + V0} \end{array} \right]$$

(26)

```
gx := dx - fx
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E(-u1 Bv\sqrt{x3-pT} + AEVx2 + ANW du2)}{AEVx1 - ANW u2 + V0} + \frac{E AEVx2}{AEVx1 + V0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$gx1 := \text{subs}(u1 = 1, u2 = 1, du2 = 1, dx - fx)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E(-Bv\sqrt{x3-pT} + AEVx2 + ANW)}{AEVx1 - ANW + V0} + \frac{E AEVx2}{AEVx1 + V0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$y = hx$

$hx := x1$

$$x1 \quad (29)$$

$u := \text{Matrix}([[u1], [u2], [du2]]);$

$$\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ du2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

▼ Differenzgrad

Festlegen des flachheitsbasierten Ausgangs

$gl(6) := x1$

$$x1 \quad (1.1)$$

Bestimme erste Lie-Ableitung des Ausgangs:

$$Lfhx := \text{Matrix}([[diff(hx, x1)], [diff(hx, x2)], [diff(hx, x3)]])^{\%T} \cdot fx \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} x2 \end{bmatrix}$$

$$Lghx := \text{Matrix}([[diff(hx, x1)], [diff(hx, x2)], [diff(hx, x3)]])^{\%T} \cdot gx \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Bestimme erste zeitliche Ableitung des Ausgangs yp:

$$gl(7) := Lf_{hx}(1) + Lg_{hx}(1) \quad x2 \quad (1.4)$$

Bestimmte zweite Lie-Ableitung des Ausgangs:

$$Lf_{2hx} := Matrix([[diff(Lf_{hx}(1), x1)], [diff(Lf_{hx}(1), x2)], [diff(Lf_{hx}(1), x3)]])^{\%T} \cdot fx \quad \left[\frac{AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl}{mEV} \right] \quad (1.5)$$

$$Lg_{Lfhx} := Matrix([[diff(Lf_{hx}(1), x1)], [diff(Lf_{hx}(1), x2)], [diff(Lf_{hx}(1), x3)]])^{\%T} \cdot gx \quad \left[0 \right] \quad (1.6)$$

Bestimme zweite zeitliche Ableitung des Ausgangs ypp:

$$gl(8) := ypp = Lf_{2hx}(1) + Lg_{Lfhx}(1) \quad ypp = \frac{AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl}{mEV} \quad (1.7)$$

Bestimme dritte Lie-Ableitung des Ausgangs:

$$Lf_{3hx} := Matrix([[diff(Lf_{2hx}(1), x1)], [diff(Lf_{2hx}(1), x2)], [diff(Lf_{2hx}(1), x3)]])^{\%T} \cdot fx \quad \left[-\frac{cEV x2}{mEV} - \frac{dEV (AEV x3 - cEV x1 - dEV x2 - Fr - Fzyl)}{mEV^2} - \frac{AEV^2 E x2}{mEV (AEV x1 + V0)} \right] \quad (1.8)$$

$$Lg_{2Lfhx} := Matrix([[diff(Lf_{2hx}(1), x1)], [diff(Lf_{2hx}(1), x2)], [diff(Lf_{2hx}(1), x3)]])^{\%T} \cdot gx \quad \left[\frac{AEV \left(-\frac{E (-u1 Bv \sqrt{x3 - pT} + AEV x2 + ANW du2)}{AEV x1 - ANW u2 + V0} + \frac{E AEV x2}{AEV x1 + V0} \right)}{mEV} \right] \quad (1.9)$$

Bestimmung dritte zeitliche Ableitung des Ausgangs yppp:

$$gl(9) := yppp = (Lf_{3hx}(1) + Lg_{2Lfhx}(1))$$

$$y_{ppp} = -\frac{cEV x_2}{mEV} - \frac{dEV (AEV x_3 - cEV x_1 - dEV x_2 - Fr - Fzyl)}{mEV^2} \quad (1.10)$$

$$- \frac{AEV^2 E x_2}{mEV (AEV x_1 + V_0)}$$

$$+ \frac{1}{mEV} \left(AEV \left(-\frac{E (-u_1 Bv \sqrt{x_3 - pT} + AEV x_2 + ANW du_2)}{AEV x_1 - ANW u_2 + V_0} \right) \right)$$

$$+ \frac{E AEV x_2}{AEV x_1 + V_0} \Bigg)$$

Matlab(gl(9));

```
cg0 = yppp == -cEV / mEV * x2 - dEV / mEV ^ 2 * (x3 * AEV - x1
* cEV - dEV * x2 - Fr - Fzyl) - AEV ^ 2 / mEV * E * x2 / (AEV *
x1 + V0) + AEV / mEV * (-E * (-u1 * Bv * sqrt(x3 - pT) + AEV *
x2 + ANW * du2) / (AEV * x1 - ANW * u2 + V0) + E * AEV * x2 /
(AEV * x1 + V0));
```

```
*****
*****
```

Ergebnis:

+ Differenzgrad r=n=3, weil Lg2Lfhx ≠ 0

+ Flacher Ausgang y

```
*****
*****
```

▼ Differenzielle Parametrierung

Zustand x1 ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$gl(10) := \text{subs}(x1 = gl(6), y); \quad y \quad (2.1)$$

Zustand x2 ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$gl(11) := \text{subs}(x2 = gl(7), yp); \quad yp \quad (2.2)$$

Zustand x3 ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$gl(12) := subs(x1 = gl(10), x2 = gl(11), solve(gl(8), x3));$$

$$\frac{cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr + Fzyl}{AEV} \quad (2.3)$$

Trajektorien generierung über zeitliche Ableitung der Eingänge

$$x_PD := Matrix([[gl(10)], [gl(11)], [gl(12)]]);$$

$$\begin{bmatrix} y \\ yp \\ \frac{cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr + Fzyl}{AEV} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matlab(x_PD);

cg1 = [y; yp; (cEV * y + dEV * yp + ypp * mEV + Fr + Fzyl) / AEV;];

Zustand x1p ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$x1p_PD := subs(x1 = gl(10), x2 = gl(11), x3 = gl(12), x1p);$$

$$x1p \quad (2.5)$$

Zustand x2p ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$x2p_PD := subs(\{x1 = gl(10), x2 = gl(11), x3 = gl(12)\}, x2p);$$

$$x2p \quad (2.6)$$

Zustand x3p ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$x3p_PD := subs(\{x1 = gl(10), x2 = gl(11), x3 = gl(12)\}, x3p);$$

$$x3p \quad (2.7)$$

Ermittlung der Vorsteuerung

Umstellen von yppp nach u1.

u1 deshalb, weil dieser Wert der Eingang über das Schaltventil ist

gl(13) := solve(gl(9), u1)

$$\frac{1}{AEV Bv E \sqrt{x3 - pT} mEV} (AEV^2 E mEV x2 + AEV^2 dEV x1 x3$$

$$+ AEV ANW E du2 mEV - AEV ANW dEV u2 x3 - AEV cEV dEV x1^2$$

$$+ AEV cEV mEV x1 x2 - AEV dEV^2 x1 x2 + AEV mEV^2 x1 yppp$$

$$+ ANW cEV dEV u2 x1 - ANW cEV mEV u2 x2 + ANW dEV^2 u2 x2$$

$$(2.8)$$

$$\begin{aligned}
& - ANW mEV^2 u2 yppp - AEV Fr dEV x1 - AEV Fzyl dEV x1 \\
& + AEV V0 dEV x3 + ANW Fr dEV u2 + ANW Fzyl dEV u2 - V0 cEV dEV x1 \\
& + V0 cEV mEV x2 - V0 dEV^2 x2 + V0 mEV^2 yppp - Fr V0 dEV \\
& - Fzyl V0 dEV)
\end{aligned}$$

Eingang u ausgedrückt durch y und seinen zeitlichen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
gl(14) & := u1 = subs(x1 = gl(10), x2 = gl(11), x3 = gl(12), gl(13)); \\
u1 & = \left(AEV^2 E mEV yp + AEV dEV (cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr + Fzyl) y \right. \\
& + AEV ANW E du2 mEV - ANW dEV u2 (cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr \\
& + Fzyl) - AEV cEV dEV y^2 + AEV cEV mEV y yp - AEV dEV^2 y yp \\
& + AEV mEV^2 y yppp + ANW cEV dEV u2 y - ANW cEV mEV u2 yp \\
& + ANW dEV^2 u2 yp - ANW mEV^2 u2 yppp - AEV Fr dEV y \\
& - AEV Fzyl dEV y + V0 dEV (cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr + Fzyl) \\
& + ANW Fr dEV u2 + ANW Fzyl dEV u2 - V0 cEV dEV y + V0 cEV mEV yp \\
& \left. - V0 dEV^2 yp + V0 mEV^2 yppp - Fr V0 dEV - Fzyl V0 dEV \right) / \\
& \left(AEV BvE \sqrt{\frac{cEV y + dEV yp + mEV ypp + Fr + Fzyl}{AEV}} - pT mEV \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Vereinfachen des Vorsteuerungsterms

$$\begin{aligned}
gl(15) & := simplify(gl(14)) \\
u1 & = \left(AEV^2 E yp + AEV ANW E du2 + AEV cEV y yp + AEV dEV y ypp \right. \\
& + AEV mEV y yppp - ANW cEV u2 yp - ANW dEV u2 ypp \\
& \left. - ANW mEV u2 yppp + V0 cEV yp + V0 dEV ypp + V0 mEV yppp \right) / \\
& \left(\sqrt{-\frac{AEV pT - cEV y - dEV yp - mEV ypp - Fr - Fzyl}{AEV}} AEV BvE \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Matlab(gl(15))

$$cg2 = u1 == (AEV ^ 2 * E * yp + AEV * ANW * E * du2 + AEV * cEV * y * yp + AEV * dEV * y * ypp + AEV * mEV * y * yppp - ANW * cEV * u2 * yp - ANW * dEV * u2 * ypp - ANW * mEV * u2 * yppp + V0 * cEV * yp + V0 * dEV * ypp + V0 * mEV * yppp) * (- (pT * AEV$$

```
- cEV * y - dEV * yp - ypp * mEV - Fr - Fzyl) / AEV) ^ (-0.1e1  
/ 0.2e1) / AEV / Bv / E;
```

Man erhält hier den Ausdruck für die flachheitsbasierte Vorsteuerung. Der Ausdruck beinhaltet lediglich die Ableitung der Ausgänge. Diese Ableitungen werden über eine Trajektorievorgabe entwickelt. Dabei müssen natürlich gewisse Entwicklungsvorschriften für Stetigkeit und Differenzierbarkeit eingehalten werden.

Dieser finale Term für die Vorsteuerung erzeugt ein Vorsteuerungssignal, dass auf das System gegeben einen - wie in der Trajektorieplanung für $y_{\text{vorgegeben}}$ - Ausgang und damit Einlassventilverlauf erzeugt.

Modellungenauigkeiten werden über Ausgangsregelungen eliminiert. Das System kann über Störgrößeneliminierungen und weitere Regelmethode erweitert werden.