
Die ausgearbeitete Hausübung ist bis zum 31. Mai 2011 im Büro Muschick (NT 02 030) abzugeben bzw. als PDF an daniel.muschick@tugraz.at zu schicken (*kein* MATLAB-Code). Zur Beurteilung der Übung werden die Hausübungsausarbeitungen und das für beide Hausübungen gemeinsame Abgabegespräch herangezogen.

Gegeben sei das folgende nichtlineare System:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -4\left(x_1 + x_2\right) - h\left(x_1 + x_2\right)$$

Für die folgenden Punkte gelte: $h(x) = -x^3 + x$.

a) Bestimmen Sie die drei Ruhelagen $\mathbf{x}_{R,i}$, $i = 1,\ldots,3$ des Systems.

b) Untersuchen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen $\mathbf{x}_{R,i}$ des Systems mittels der Methode der ersten Näherung.

c) Visualisieren Sie die Trajektorien des Systems im Zustandsraum durch ein Vektorfeld. Zeichnen Sie die Ruhelagen ein und überprüfen Sie visuell die Ergebnisse aus b).

Betrachten Sie nun eine allgemeine Funktion $h: R \to R$ mit folgenden Eigenschaften: $h(0) = 0$, $x \cdot h(x) \geq 0 \quad \forall\, |x| \leq 1$.

d) Beweisen Sie die asymptotische Stabilität der Ruhelage im Ursprung $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Bestimmen Sie hierfür eine positiv definite Lyapunov-Funktion $V(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} = \left[x_1, \quad x_2\right]^T$ mit Hilfe der *Methode des variablen Gradienten.* Deren zeitliche Ableitung soll für alle $|x_1 + x_2| \leq 1$ negativ definit sein: $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \ \forall\, |x_1 + x_2| \leq 1$.
Hinweis: Eliminieren Sie Mischterme $x_1 x_2$ nicht gleich, sondern versuchen Sie *vollständige Quadrate* $(x_1 + x_2)^2$ zu bilden.

Eine mögliche Lyapunov-Funktion lautet z.B. $V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$. Es soll nun der *Einzugsbereich* von $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ abgeschätzt werden.

e) Bestimmen Sie den maximalen Wert $V(\mathbf{x}) = c$ so, dass für die *gesamte* Menge $\Omega_c = \left\{\mathbf{x} \in R^2 \,|\, V(\mathbf{x}) < c\right\}$ gilt: $\dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}\in\Omega_c} < 0$.

f) Versuchen Sie mit weiteren Überlegungen, einen möglichst großen garantierten Einzugsbereich zu erhalten. *Hinweis:* Bestimmen Sie Bereiche der Grenzen für $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, die von den Trajektorien nicht passiert werden können.

g) Bestimmen Sie den Einzugsbereich numerisch durch eine „Rückwärtssimulation“ (hierbei gelte wieder $h(x) = -x^3 + x$).