Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMRT Measurement and Control Laboratory
Prof. L. Guzzella
Prof. R. D'Andrea

151-0591-00 **Regelungstechnik I** (HS 2007) **Musterlösung**

Übung 3 **Systemklassifizierung, Systeme 1. Ordnung im Zeitbereich, Stabilitätsanalyse**

moritz.oetiker@imrt.mavt.ethz.ch, 26. Oktober 2007

Aufgabe 1 (Klassifizierung von Systemen)

Es gelten die folgenden Faustregeln für die Klassifizierung von Systemen:

SISO/MIMO: SISO (single input single output) Systeme sind Systeme mit genau einem Eingangssignal und genau einem Ausgangssignal. Bei MIMO (multiple input multiple output) Systemen ist die Dimension des Eingangs- als auch des Ausgangsvektors grösser als Eins. Weiter unterscheidet man manchmal SIMO und MISO Systeme.

Zeitinvariant/zeitvariant: Bei einem zeitinvarianten System sind die Koeffizienten der Systemgleichungen keine Funktionen der Zeit. Zeitvariante Systeme enthalten Koeffizienten die von der Zeit abhängig sind.

Linear/nichtlinear: Damit ein System linear ist, darf kein Term der Systemgleichungen nichtlinear in $x(t)$, $u(t)$, oder $y(t)$ sein. Nichtlineare Systeme enthalten nichtlineare Terme in $x(t)$, $u(t)$, oder $y(t)$.
Linearität bedeutet, dass sowohl das Verstärkungsprinzip $[f(a \cdot x) = a \cdot f(x)]$, als auch das Superpositionsprinzip $[f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)]$ gilt.

Bemerkung: Oft wird mit dem Begriff *lineare Funktion* eine Abbildung der Form $y = a\,x + b$, also ein Polynom erster Ordnung bezeichnet. Im mathematisch strengen Sinn handelt es sich dabei jedoch um eine *linear-inhomogene* Funktion bzw. um eine *affine* Funktion.

Statisch/dynamisch: Der Ausgang von statischen Systemen hängt nur vom aktuellen Wert des Eingangssignals, aber nicht von der Vergangenheit ab. Dynamische Systeme weisen ein Memory auf, das Informationen über den vergangenen Verlauf des Systems speichert. Systeme die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, sind immer dynamisch.

Wendet man diese Regeln auf die Systeme aus der Aufgabenstellung an, so resultiert die folgende Klassifizierung:

a) *SISO, zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.* Das System hat genau eine Eingangsgrösse und genau eine Ausgangsgrösse, d.h. es ist ein SISO System. Das System enthält eine Speichergrösse und ist damit dynamisch und 1. Ordnung. Es ist linear und aufgrund des Terms $1/\sqrt{t}$ zeitvariant.

b) *MIMO, zeitinvariant, nichtlinear, statisch (0. Ordnung).* Das System hat zwei Eingangsgrössen und zwei Ausgangsgrössen, d.h. es gehört zur Kategorie der MIMO Systeme. Es ist aufgrund des Terms K nichtlinear, und da der Ausgang direkt aus dem Eingang folgt statisch, d.h. 0. Ordnung. Alle Koeffizienten sind konstant, d.h. das System ist zeitinvariant.

c) *SISO, zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.* Das System hat genau eine Eingangsgrösse und genau eine Ausgangsgrösse, d.h. es gehört zur Kategorie der SISO Systeme. Es ist dynamisch (das System enthält eine Speichergrösse und ist damit 1. Ordnung) und aufgrund des Terms $t^2\,x(t)$ zeitvariant. Das System ist linear, da kein Term der Systemgleichungen nichtlinear in $x(t)$, $u(t)$, oder $y(t)$ ist.

d) *MIMO, zeitvariant, linear, dynamisch, 4. Ordnung.* Das System hat zwei Eingangsgrössen und fünf Ausgangsgrössen (folgt aus den Dimensionen der Systemmatrizen), d.h. es gehört zur Kategorie der MIMO Systeme. Es ist dynamisch und linear. Der Zustandsvektor des Systems hat vier Komponenten (beachte die Dimensionen der Systemmatrix M), womit das System 4. Ordnung ist.

Aufgabe 2 (Lineares System 1. Ordnung)

Die Temperaturdynamik des Hörsaals ergibt sich aus der Energiebilanz

$$\frac{d}{dt}U(t) = \overset{*}{Q}_{in}(t) - \overset{*}{Q}_{out}(t). \tag{1}$$

Durch die folgenden Substitutionen:

$$\frac{d}{dt}U(t) = c_p\,\rho\,V\frac{d}{dt}(\vartheta_i(t) - \vartheta_o) \tag{2}$$

$$\overset{*}{Q}_{in}(t) = P(t) \tag{3}$$

$$\overset{*}{Q}_{out}(t) = \kappa A\,(\vartheta_i(t) - \vartheta_o) \tag{4}$$

ergibt sich dann das System aus der Aufgabenstellung,

$$c_p\,\rho\,V\,\frac{d}{dt}(\vartheta_i(t) - \vartheta_o) = -\kappa A\,(\vartheta_i(t) - \vartheta_o) + P(t), \tag{5}$$

beziehungsweise

$$c_p\,\rho\,V\,\frac{dz(t)}{dt} = -\kappa A\,z(t) + v(t). \tag{6}$$

Dieses SISO System ist linear, zeitinvariant, dynamisch und 1. Ordnung.

a) Schreibt man die Temperaturdynamik des Hörsaals (Gleichung 6) etwas um,

$$\frac{d}{dt}z(t) = -\frac{\kappa A}{c_p\,\rho\,V}\,z(t) + \frac{1}{c_p\,\rho\,V}\,v(t), \tag{7}$$

und vergleicht sie mit der allgemeinen Form der Dynamikgleichung eines linearen Systems 1. Ordnung,

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau}\,x(t) + \frac{k}{\tau}\,u(t), \qquad \tau, k > 0 \tag{8}$$

so erkennt man, dass für die Zeitkonstante τ und die Verstärkung k des Hörsaals gilt:

$$\tau = \frac{c_p\,\rho\,V}{\kappa A} \tag{9}$$

$$k = \frac{1}{\kappa A}. \tag{10}$$

In der Abbildung 1 ist der Verlauf der Lufttemperatur bei einem Sprung in der Heizleistung dargestellt. Bei $t = 1000\,\text{s}$ wird die Heizleistung von 0 auf $P_0 = 30\,\text{kW}$ erhöht. Die Lufttemperatur steigt als Folge davon von ihrem Gleichgewichtswert $\vartheta_i = \vartheta_o$ (d.h. $z = 0$) auf den neuen Gleichgewichtswert $\vartheta_i = \vartheta_o + k\,P_0$ (d.h. $z = k\,P_0$). Aus der Schnelligkeit des Anstiegs und aus dem stationären Übertragungsverhalten ($t \to \infty$) lassen sich die Systemparameter τ und k ermitteln (vergleiche hierzu die Konstruktion in Abbildung 1, unten).

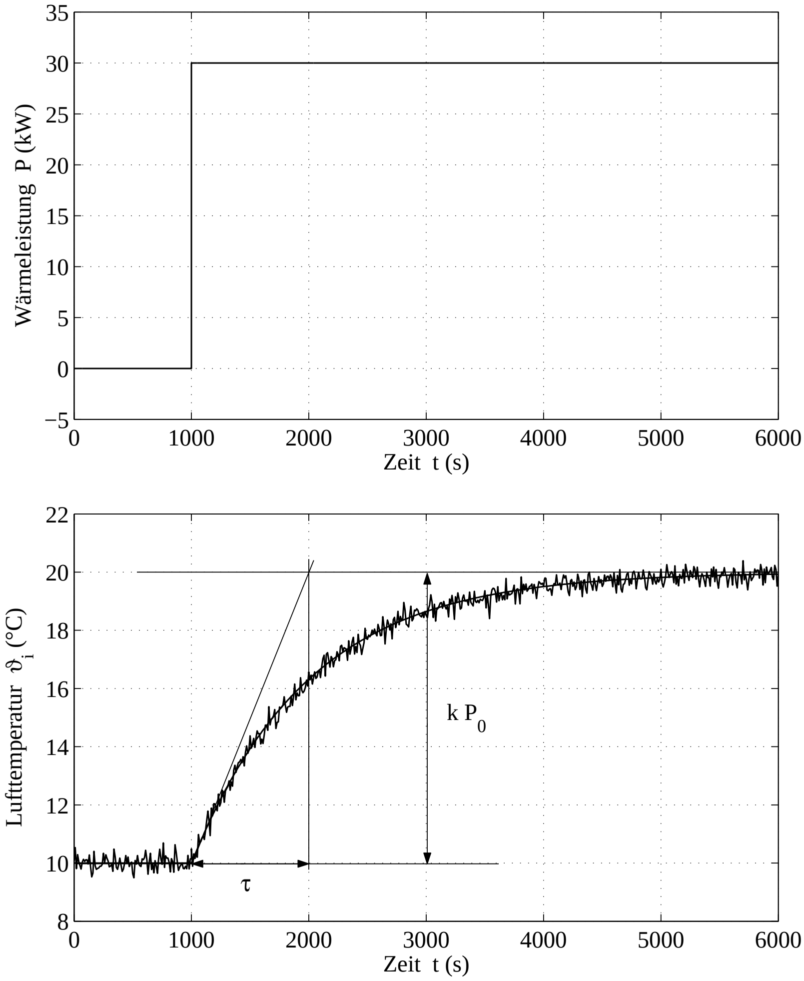

Abbildung 1: „Step response“ des Hörsaals

Aus der „gemessenen“ Systemantwort ergeben sich die Systemparameter approximativ wie folgt:

$$\tau \approx 1000\,\mathrm{s} \tag{11}$$

$$k \approx \frac{10}{P_0} = \frac{10}{3 \cdot 10^4} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \approx 0.33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K\,W^{-1}}. \tag{12}$$

Aus den Gleichungen 9 und 10 lassen sich damit (bei bekanntem c_p und ρ) der Wärmeübergangsparameter κA und das Volumen V des Hörsaals berechnen.

$$\kappa A = \frac{1}{k} \approx 3000\,\mathrm{W\,K^{-1}} \tag{13}$$

$$V = \frac{\kappa A}{c_p\,\rho}\,\tau \approx 2300\,\mathrm{m}^3 \tag{14}$$

Bemerkung: Die allgemeine Antwort eines linearen, zeitinvarianten Systems 1. Ordnung (Gleichung 8) aus der Nulllage ($x(0) = 0$) auf einen Sprung der Höhe u_0 zur Zeit t_0,

$$u(t) = u_0\,h(t - t_0), \tag{15}$$

ist gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ u_0\,k\,(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) & \text{für } t \geq t_0, \end{cases} \tag{16}$$

und es gilt:

$$\text{Asymptote:} \qquad \lim_{t\to\infty}\left(u_0\, k\,(1-e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\right) = u_0\, k \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\text{Tangente}^1: \qquad y_T(t) &= y(t_0) + \left.\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} \cdot (t-t_0) \\ &= 0 + u_0\, k\, \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}|_{t=t_0} \cdot (t-t_0) = u_0\, k\, \frac{1}{\tau} \cdot (t-t_0)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{Schnittpunkt:} \quad u_0\, k\, \frac{1}{\tau} \cdot (t_{SP} - t_0) = u_0\, k \quad \Rightarrow \quad \tau = t_{SP} - t_0. \tag{19}$$

b) Aus der Aufgabenstellung lässt sich die zugeführte Wärmeleistung als Funktion der Zeit bestimmen (vergleiche Abbildung 2, oben):

$$P(t) = P_{Heiz} + P_{Pers}(t) = \begin{cases} 3\cdot 10^4 + 258 \cdot 75 + 1 \cdot 150 = 49500, & 0 \le t < 2700 \\ 3 \cdot 10^4, & 2700 \le t < 3300 \\ 3\cdot 10^4 + 258 \cdot 75 + 1 \cdot 150 = 49500, & 3300 \le t < 6000 \end{cases} \tag{20}$$

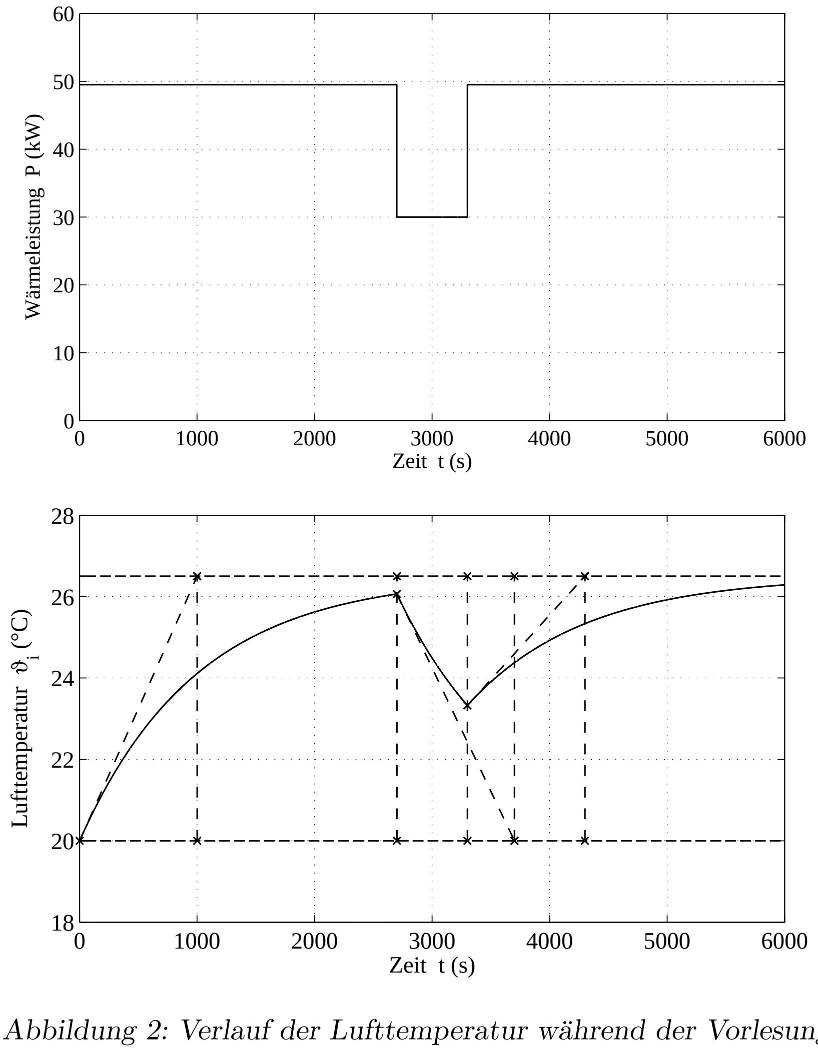

Abbildung 2: Verlauf der Lufttemperatur während der Vorlesung

[1] An $y(t)$ an der Sprungstelle $t = t_0$.

Das Problem lässt sich – aufgrund der Linearität (→ Superpositionsprinzip) – in drei Subprobleme aufteilen: Für die drei Abschnitte mit den Problemzeiten Δt_1, Δt_p und Δt_2 wird jeweils die Systemantwort bei gegebenem Anfangszustand und konstantem Eingangssignal berechnet. Da das System zeitinvariant ist, kann zudem für jeden Problemabschnitt eine eigene Zeit definiert werden (so dass die Sprünge immer zur Zeit 0 s starten).

Für den ersten Abschnitt von $0 \leq t < \Delta t_1$ ergibt sich somit die Systemantwort bei einer Anfangsbedingung von

$$z(t=0) = \vartheta_i(t=0) - \vartheta_o = 20 - 10 = 10\,\mathrm{K} \tag{21}$$

zu

$$w(t) = 10\,e^{-\frac{t}{1000}} + 49500 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{1000}}). \tag{22}$$

Nach der ersten Lektion um 11:00 beträgt die Temperaturdifferenz zur Umgebung

$$w(t = \Delta t_1) = w(t = 2700) = 16.1\,\mathrm{K}. \tag{23}$$

Für den zweiten Abschnitt (mit der neuen Zeit $\tilde{t}$) von $0 \leq \tilde{t} < \Delta t_p$ ergibt sich die Systemantwort bei einer Anfangsbedingung von

$$z(\tilde{t} = 0) = w(t = \Delta t_1) = 16.1\,\mathrm{K} \tag{24}$$

zu

$$w(\tilde{t}) = 16.1\,e^{-\frac{\tilde{t}}{1000}} + 30000 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-\frac{\tilde{t}}{1000}}). \tag{25}$$

Nach der Pause um 11:10 beträgt die Temperaturdifferenz zur Umgebung

$$w(\tilde{t} = \Delta t_p) = w(\tilde{t} = 600) = 13.3\,\mathrm{K}. \tag{26}$$

Für den letzten Abschnitt (mit der Zeit $\hat{t}$) von $0 \leq \hat{t} < \Delta t_2$ ergibt sich die Systemantwort bei einer Anfangsbedingung von

$$z(\hat{t} = 0) = w(\tilde{t} = \Delta t_p) = 13.3\,\mathrm{K} \tag{27}$$

zu

$$w(\hat{t}) = 13.3\,e^{-\frac{\hat{t}}{1000}} + 49500 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-\frac{\hat{t}}{1000}}). \tag{28}$$

Nach der Vorlesung um 11:55 beträgt die Temperaturdifferenz zur Umgebung

$$w(\hat{t} = \Delta t_2) = w(\hat{t} = 2700) = 16.3\,\mathrm{K}. \tag{29}$$

Die Lufttemperatur im Hörsaal nach der Vorlesung um 11:55 beträgt somit gemäss dem verwendeten Modell und der durchgeführten Rechnung

$$\vartheta_i(t = \Delta t_1 + \Delta t_p + \Delta t_2) + \vartheta_o = 16.3 + 10 = 26.3°\mathrm{C}. \tag{30}$$

Im unteren Plot der Abbildung 2 ist der Verlauf der Temperatur im Hörsaal als Funktion der Zeit dargestellt. Ebenfalls eingezeichnet sind die Asymptoten (bei $\vartheta_i = \vartheta_o + 30000 \cdot k = 20°\mathrm{C}$ und $\vartheta_i = \vartheta_o + 45900 \cdot k = 26.5°\mathrm{C}$) und die Tangenten an den Temperaturverlauf an Sprungstellen.

Bemerkung: Allgemein lässt sich die Antwort eines linearen, zeitinvarianten Systems 1. Ordnung (Gleichung 8) aus einer Anfangslage,

$$x(0) = x_0, \tag{31}$$

auf einen Sprung der Höhe u_0 zur Zeit $t = 0$,

$$u(t) = u_0\, h(t), \tag{32}$$

schreiben als

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} x_0 + u_0\, k\, (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0. \tag{33}$$

Asymptotisch gilt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = u_0\, k. \tag{34}$$

c) Ein einfaches Regelsystem zur Kompensation der Wirkung der Personenabwärme oder anderen Störgrössen, wie beispielsweise Sonneneinstrahlung, ist in der Abbildung 3 dargestellt.

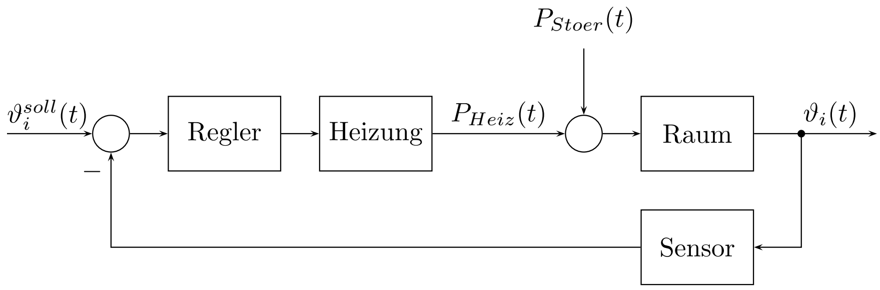

Abbildung 3: Signalflussbild einer Temperaturregelung

Aufgabe 3 (Stabilitätsanalyse)

Die Lyapunov Stabilität eines Systems kann anhand der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix beurteilt werden. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ lautet,

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{spur}(A) \cdot \lambda + \det(A). \tag{35}$$

a) Da der Realteil beider Eigenwerte negativ ist, ist das System *asymptotisch stabil.*

$$\lambda^2 - (2-7)\cdot\lambda + (-14+48) = \lambda^2 + 5\,\lambda + 34 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -2.5 \pm \sqrt{27.75}\, i$$

b) Der Eigenwert mit grösstem Realteil ist 0. Das System ist damit *stabil* aber *nicht asymptotisch stabil.*

$$\lambda^2 - (-1)\cdot\lambda + (-6+6) = \lambda^2 + 1\,\lambda \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = -1$$

Bemerkung: Tritt der Eigenwert 0 (bzw. komplexe Eigenwertpaare mit verschwindendem Realteil) mehrfach auf, und ist das System nicht diagonalisierbar, so ist es instabil.

c) Die Systemmatrix ist blockdiagonal und setzt sich aus der Untermatrix $A_2 = -11$ und der Matrix aus Teilaufgabe **a)** zusammen. Das System hat damit nur Eigenwerte mit negativem Realteil und ist somit *asymptotisch stabil*.

$$\lambda_1 = -11, \; \lambda_{2,3} = -2.5 \pm \sqrt{27.75}\, i$$

d) Die beiden Eigenwerte von A besitzen positiven Realteil. Das System ist somit *instabil*.

Alle Angaben ohne Gewähr.