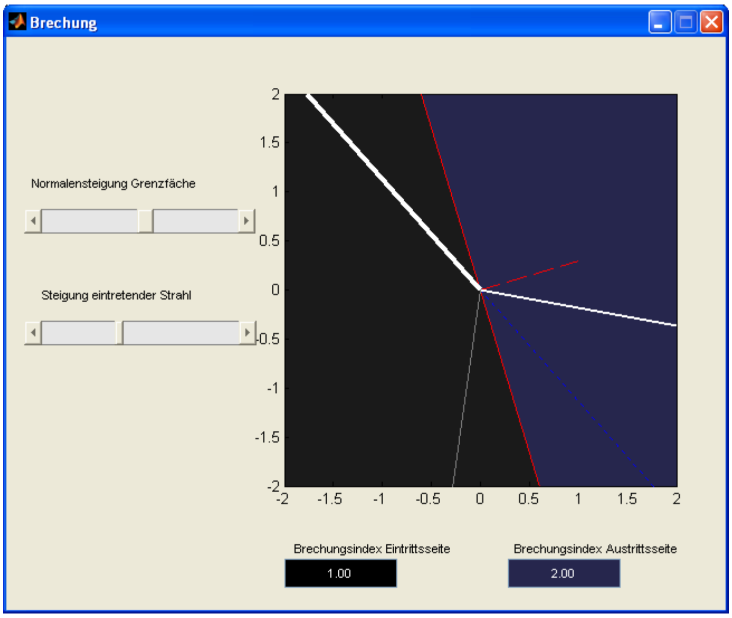
Aufgabe Visualisierung des Brechungsgesetzes

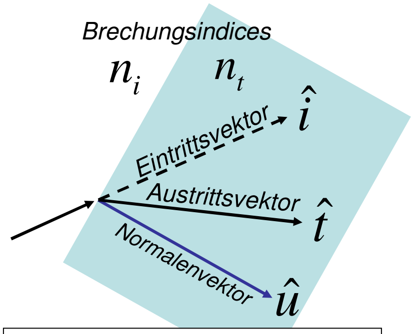


Die Brechung eines Lichtstrahls beim Durchtritt durch die Grenze zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex soll in 2 dimensionaler Darstellung visualisiert werden.

•Der eintretende Lichtstrahl soll von links nach rechts verlaufen.
•Die Steigung des eintretenden Strahls soll von -5 bis + 5 einstellbar sein.
•Die Grenzlinie zwischen beiden Medien soll durch die Mitte des Zeichenbereichs verlaufen.
•Die Normale zur Grenzlinie soll nach rechts zeigen. Die Steigung der Normalen zur Grenzline soll von -5 bis + 5 einstellbar sein.
•In einer vereinfachten Version kann die Granzlinie zwischen den beiden Medien fest sein und senkrecht verlaufen. (Steigung =0)

Dargestellt werden sollen:
•Die Grenzlinie zwischen den Medien und die Normale
•Der eintretende Strahl (dicke Linie) , dessen Fortsetzung (gestrichelt)
•Der gebrochene Strahl
•Der reflektierte Strahl

Das Brechungsgesetz in vektorieller Schreibweise:



$$n_i\left(\hat{i}\times\hat{u}\right)=n_t\left(\hat{t}\times\hat{u}\right)$$

Quelle: E. Hecht: Optik S. 160

Im zweidimensionalen Fall:

$$n_i\left(i_x u_y - i_y u_x\right)=n_t\left(t_x u_y - t_y u_x\right)$$

Da es sich um Einheitsvektoren handelt gilt:

$$u_x^2+u_y^2=1$$
$$i_x^2+i_y^2=1$$
$$t_x^2+t_y^2=1$$

Definition des Vektorprodukts (Kreuzprodukt) In drei Dimensionen:

$$\hat{a}\times\hat{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

Reduziert auf zwei Dimensionen:

$$\hat{a}\times\hat{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Die Lichtstrahlen sollen durch Ursprungsgeraden mit Steigung ***a*** repräsentiert werden:

Einfallender Strahl: $i_y=a_i\cdot i_x$

gebrochener Strahl: $t_y=a_t\cdot t_x$

Normalenvektor: $u_y=a_u\cdot u_x$

Anstelle der Einheitsvektoren werden zunächst Vektoren in die Brechungsgleichung eingesetzt deren x Komponente gleich +1 ist. Damit ist die Richtung der Lichtstrahlen und des Normalenvektors von links nach rechts festgelegt. (Achtung: für den gebrochenen Strahl ist das nicht unbedingt gegeben!) Als y Komponenten können dann die entsprechenden Steigungen eingesetzt werden. Um wieder zu Einheitsvektoren zu kommen müssen nun alle Vektorkomponenten durch den Betrag des jeweiligen Vektors geteilt werden.

$$\frac{n_i\left(a_u-a_i\right)}{\sqrt{1+a_i^2}\cdot\sqrt{1+a_u^2}}=\frac{n_t\left(a_u-a_t\right)}{\sqrt{1+a_t^2}\cdot\sqrt{1+a_u^2}}$$

Vereinfacht zu

$$\frac{n_i\left(a_u-a_i\right)}{\sqrt{1+a_i^2}}=\frac{n_t\left(a_u-a_t\right)}{\sqrt{1+a_t^2}}$$

Führt auf eine quadratische Gleichung für die Steigung at des gebrochenen Strahls. Nur eine der beiden möglichen Lösungen der Quadratischen Gleichung ist sinnvoll. Ist die Lösung komplex tritt Totalreflexion auf und keine der beiden Lösungen ist sinnvoll. Statt dessen muss der total reflektierte Strahl berechnet werden.

Die korrekte Steigung und Richtung des gebrochenen Strahls ergeben sich aus folgende Überlegung. Der Austrittsvektor vom Normalenvektor aus auf der gleichen Seite wie der Eintrittsvektor und innerhalb des Austrittsmediums befinden.