Die Newton-Methode I

Ziel: Schnelle Berechnung der Koeffizienten c_k des Interpolationspolynoms p für die Stützpunkte (x_j, f_j) bezüglich der problemangepassten Newton-Basis.

Darstellung des Interpolationspolynoms bzgl. der **Monom-Basis**:

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n.$$

Darstellung des Interpolationspolynoms bzgl. der angepassten **Newton-Basis**:

$$p(x) = c_0 + c_1\,(x - x_1) + c_2\,(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + c_n\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Offensichtlich ist $a_n = c_n$. Wir führen für diesen Koeffizienten (den Höchstkoeffizienten im Interpolationpolynom) eine Bezeichnung ein.

Definition:

$$f[x_1,\ x_2\ \ldots, x_n,\ x_{n+1}] := a_n = c_n.$$

Dieser Koeffizient heißt **n-te dividierte Differenz**.

Grund für die Bezeichnung siehe die nächsten Seiten.

Bemerkung: Da es auf die Nummerierung der Stützpunkte nicht ankommt, gilt z.B:

$$f[x_1,\ x_2,\ x_3] = f[x_1,\ x_2,\ x_3] = f[x_3,\ x_1,\ x_2].$$

Die Newton-Methode II

Wir betrachten die Intepolationpolynome für $1-3$ Stützpunkte:

<u>Interpolationspolynom für einen Stützpunkt (x_1, f_1):</u>

$$p_1(x) = f_1$$

Der Höchstkoeffizient ist f_1, also ist $f[x_1] = f_1$.

<u>Interpolationspolynom für zwei Stützpunkte (x_1, f_1), (x_2, f_2):</u>

$$p_2(x) = f_1 + \underbrace{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}}_{f[x_1,\, x_2]}(x - x_1).$$

<u>Interpolationspolynom für drei Stützpunkte (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3):</u>

$$p_3(x) = f_1 + \underbrace{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}}_{f[x_1,\, x_2]}(x - x_1) + \underbrace{\frac{\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2} - \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1}}_{f[x_1,\, x_2,\, x_3]}(x - x_1)(x - x_2)$$

Dies motiviert die Bezeichnung 'dividierte Differenz' für die Höchstkoeffizienten

$$f[x_1,\ x_2\ \ldots,x_n,\ x_{n+1}].$$

Die Newton-Methode III: Das Lemma von Aitken und die Rekursionsformel

Lemma: Gegeben seien die Stützpunkte (x_j, f_j), $j = 1, \ldots, n+1$. Sei $p_{1,\ldots,n}$ das Polynom vom Grad $\leq n-1$, welches die Stützpunkte mit den Indizes 1 bis n interpoliert, und sei $p_{2,\ldots,n+1}$ das Polynom vom Grad $\leq n-1$, welches die Stützpunkte mit den Indizes 2 bis $n+1$ interpoliert. Dann ist das Polynom $p_{1,\ldots,n+1}$ mit

$$p_{1,\ldots,n+1}(x) = \frac{(x - x_1)\, p_{2,\ldots,n+1}(x) - (x - x_{n+1})\, p_{1,\ldots,n}(x)}{x_{n+1} - x_1} \qquad (*)$$

das Interpolationspolynom zu allen Stützpunkten.

Beweis: Nachrechnen.

Folgerung: Die Höchstkoeffizienten der beteiligten Polynome sind nach Definition:

$$\begin{array}{ll}
\text{Für } p_{1,\ldots,n}: & f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n] \\
\text{Für } p_{2,\ldots,n+1}: & f[x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x_{n+1}] \\
\text{Für } p_{1,\ldots,n+1}: & f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x_{n+1}]
\end{array}$$

Aus $(*)$ folgt die Rekursionsformel für die Höchstkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x_{n+1}] &= \frac{f[x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n,\, x_{n+1}] - f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n]}{x_{n+1} - x_1} \\
&= \frac{f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n] - f[x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n,\, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Die Newton-Methode IV: Anwendung der Rekursionsformel

Rekursionsformel:

$$f[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}] = \frac{f[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}] - f[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]}{x_{n+1} - x_1}.$$

Bemerkung: Auf die Reihenfolge der Werte in den eckigen Klammern und auf ihre Nummerierung kommt es bei der Berechnung nicht an.

Beispielrechnung:

Angenommen, es ist bekannt, dass

$$f[-1,\ 0.5,\ 7,\ 2] = 5, \qquad f[2,\ 9,\ 0.5,\ -1] = 3.$$

Die Listen in den eckigen Klammern unterscheiden sich abgesehen von der Reihenfolge der Einträge nur in den Zahlen 7 und 9. Setze (in Gedanken) $x_1 = 9$, $x_{n+1} = 7$. Dann ist die dividierte Differenz, welche zu allen vorkommenden Daten gehört, nach obiger Formel gegeben durch

$$f[-1,\ 0.5,\ 7,\ 2,\ 9] = \frac{f[2,\ 9,\ 0.5,\ -1] - f[-1,\ 0.5,\ 7,\ 2]}{9-7} = \frac{3-5}{9-7} = -1.$$

Newton-Methode V: Der Algorithmus zur Berechnung der dividierten Differenzen

Mit der Rekursionsformel kann man die dividierten Differenzen nacheinander ausrechnen. Dies führt auf das folgende

Schema zur Berechnung der dividierten Differenzen:

$$
\begin{array}{c|llll}
x_1 & f_1 = f[x_1] & f[x_1,\, x_2] & f[x_1,\, x_2,\, x_3] & f[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4] \\
x_2 & f_2 = f[x_2] & f[x_2,\, x_3] & f[x_2,\, x_3,\, x_4] & \\
x_3 & f_3 = f[x_3] & f[x_3,\, x_4] & & \\
x_4 & f_4 = f[x_4] & & &
\end{array}
$$

Erläuterung: In den ersten beiden Spalten stehen die Interpolationsdaten. Die 3. Spalte rechnet man aus, indem man von zwei untereinander stehenden Einträgen der 2. Spalte die dividierte Differenz bildet. Die 4. Spalte rechnet man aus, indem man von zwei untereinander stehenden Einträgen der 3. Spalte die dividierte Differenz bildet, usw. In der oberen Zeile stehen dann die Koeffizienten des Interpolationspolynoms p bezüglich der zugehörigen Newton-Basis, d.h. es ist

$$
\begin{aligned}
p(x) \;=\;& f[x_1] + f[x_1,\, x_2]\,(x - x_1) + f[x_1,\, x_2,\, x_3]\,(x - x_1)(x - x_2) \\
&+ f[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4]\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).
\end{aligned}
$$

Wenn ein neuer Stützpunkt (x_5, f_5) hinzukommt, dann kann man im obigen Schema einfach eine neue untere Schrägzeile anfügen (siehe nächste Seite).

Schema zur Berechnung der dividierten Differenzen:

$$
\begin{array}{c|lllll}
x_1 & f_1 = f[x_1] & f[x_1,\, x_2] & f[x_1,\, x_2,\, x_3] & f[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4] & f[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5] \\
x_2 & f_2 = f[x_2] & f[x_2,\, x_3] & f[x_2,\, x_3,\, x_4] & f[x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5] & \\
x_3 & f_3 = f[x_3] & f[x_3,\, x_4] & f[x_3,\, x_4,\, x_5] & & \\
x_4 & f_4 = f[x_4] & f[x_4,\, x_5] & & & \\
x_5 & f_5 = f[x_5] & & & &
\end{array}
$$

Erläuterung: Wenn man die blau gefärbten Werte schon berechnet hat, dann kann man anschließend die roten mit der Rekursionsformel berechnen.