

1 Spektralanalyse

1.1 Grundlage der Diskreten Fourier-Analyse

Zunächst soll ein zeitdiskretes Signal im Frequenzbereich dargestellt und analysiert werden. Für ein zeitdiskretes Signal wird dazu die *Diskrete Fourier-Transformation* (DFT) angewendet. Dabei wird das Signal in gewichtete Cosinus- und Sinusanteile mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen zerlegt. Das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ und das zeitdiskrete Signal $x[n]$ stehen in folgendem Zusammenhang:

$$x[n] = x(t = n \cdot T_S) \quad (1.1)$$

T_S ist das sogenannte Abtastintervall und

$$f_S = \frac{1}{T_S} \quad (1.2)$$

die sogenannte Abtastrate (engl. sampling rate). Die Darstellung des Signals im Zeitbereich, zusammengesetzt aus einer Überlagerung von Cosinus und Sinusfunktionen, hat diese Form [Wer08]:

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j \cdot 2\pi \frac{k \cdot n}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left(\cos \left(2\pi \frac{k \cdot n}{N} \right) + j \cdot \sin \left(2\pi \frac{k \cdot n}{N} \right) \right) \quad (1.3)$$

N ist die Länge des Signals, sodass $n = 0, 1, 2, \dots, N$. $X[k]$ stellt das sogenannte Spektrum dar, welches berechnet werden soll. Die Berechnungsvorschrift hierzu lautet:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{k \cdot n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \left(\cos \left(2\pi \frac{k \cdot n}{N} \right) - j \cdot \sin \left(2\pi \frac{k \cdot n}{N} \right) \right) \quad (1.4)$$

Zunächst werden für die Gleichungen 1.3 und 1.4 der DFT grundlegende Eigenschaften erläutert:

Reellwertige Signale $x[n]$

Für ein rein reelles Signal der Länge N ergeben sich N komplexe Koeffizienten $X[k]$ (Betrag und Phase), wobei die Koeffizienten für $k = 0, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ als komplex-konjugierte Koeffizienten für $k = \left(\frac{N}{2} + 1\right), \dots, N$ wieder auftreten. Die Koeffizienten sind „symmetrisch“ bezüglich $k = \frac{N}{2}$, wenn N gerade ist. Es gilt $X[k] = \overline{X[N - k]}$. Demzufolge

reicht für die Analyse des Frequenzspektrums die Betrachtung der Werte von $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ aus.

Periodizität des Signals

In Gleichung 1.3 wird deutlich, dass das aus Sinus- und Cosinusanteilen zusammengesetzte Signal N -periodisch fortgesetzt werden kann, sodass $x[n] = x[n + N]$ und für Gleichung 1.4 $X[k] = X[k + N]$ gelten.

Zuordnung der Frequenz zu den Koeffizienten $X[k]$ und Frequenzauflösung

Der Abstand zwischen den k -ten Frequenzen ist von der Anzahl der Abtastpunkte n und von der Abtastrate f_S abhängig:

$$\Delta f = \frac{f_S}{N} = \frac{1}{T_S N} \quad (1.5)$$

Δf entspricht der möglichen Frequenzauflösung und das Produkt $T_S \cdot N$ der Messdauer. Durch eine Erhöhung der Messdauer bei gleichbleibender Abtastfrequenz kann somit die spektrale Auflösung bzw. die Frequenzauflösung verfeinert werden.

Leck-Effekt (Leakage)

Mithilfe der beiden vorherigen Punkte lässt sich der Leck-Effekt erklären. Das durch die DFT abgetastete Signal ist immer periodisch bzw. wird periodisch „konstruiert“. Ein Signal endlicher Länge ist mit einem abgeschnittenen Signal aus Sicht der DFT vergleichbar. Besteht das Signal nur aus Frequenzanteilen, die mit ganzem Vielfachen der Periode in dem Signal endlicher Länge vorkommen, tritt kein Leck-Effekt auf. Da die zu messenden Frequenzen jedoch im Vorfeld unbekannt sind, lässt sich der Leck-Effekt nicht vermeiden. Abbildung 1.1 zeigt die Auswirkung des Leck-Effekts. Links und rechts ist oben jeweils das periodische Signal und unten jeweils die dazugehörige DFT dargestellt. Die blaue und die grün gestrichelte Linie zeigen das („tatsächliche“) kontinuierliche Spektrum für ein Signal endlicher Länge.

Im weißen Bereich wird das Signal abgetastet und anhand dessen die DFT durchgeführt. Der graue Bereich zeigt die periodische Weiterführung des Signals durch die DFT. In der linken Abbildung hat das periodische Signal eine Frequenz, sodass die dreifache Periodendauer mit der Länge des Zeitfensters zusammenfällt, für welches das Spektrum des Signals analysiert wird. Die Punkte im unteren Bild stellen die Ergebnisse der DFT dar. Es wird lediglich die Frequenz des Cosinussignals mit einer Frequenz von $3Hz$ im Spektrum angezeigt. Es tritt kein Leck-Effekt auf. Im rechten Bild liegt kein ganzes Vielfaches der Periodendauer des Signals im Zeitfenster. Im Ergebnis der DFT zeigt sich die Abweichung des ermittelten spektralen Maximums vom tatsächlichen Maximum. Aufgrund der diskreten und begrenzten spektralen Auflösung des Signals liegt das ermittelte Maximum bei $2Hz$ anstatt bei $2,3Hz$. Zudem sind weitere Frequenzanteile links und rechts neben dem Maximum hinzugekommen.

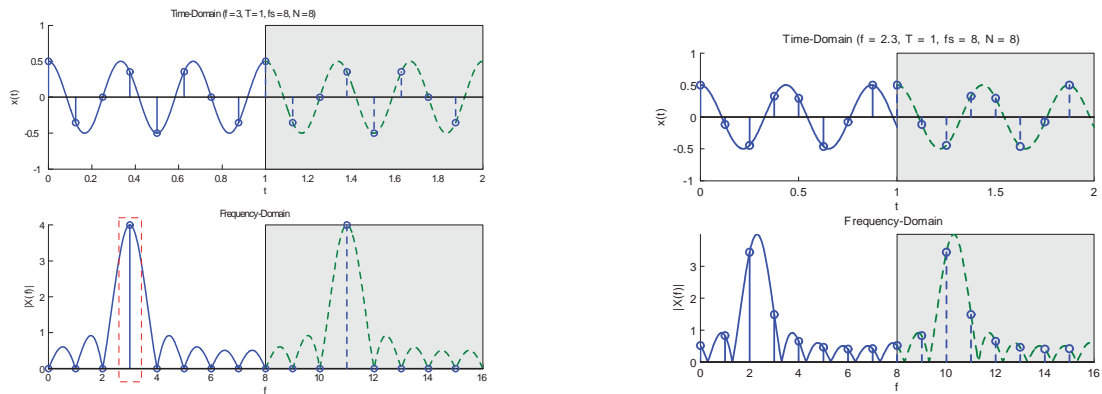


Abbildung 1.1: Links: DFT eines periodischen Signals mit einer Frequenz von $3H_z$. Es liegen genau drei Perioden im Zeitfenster. Rechts: DFT eines periodischen Signals mit einer Frequenz von $2,3H_z$. Die Perioden liegen nicht genau im Zeitfenster (Quelle: [tuw])

Fensterung

Wenn es erforderlich ist, kann der Leck-Effekt reduziert werden, indem das Signal im Zeitbereich mit einem bestimmten *Fenster* multipliziert wird. Beim vorherigen Beispiel in Abbildung 1.1 wurde das Signal mit endlicher Länge ebenfalls mit einem Fenster und zwar einem Rechteck-Fenster der Länge des Signals versehen. Allgemein wird die Fenster als Funktion $w[n]$ angegeben, sodass sich das Signal für die DFT als

$$x^*[n] = x[n] \cdot w[n] \quad (1.6)$$

schreiben lässt. Abbildung 1.2 zeigt die Fensterfunktion $w[n]$ (links) sowie das Spektrum des Fensters (rechts). Wie an den Amplitudenspektren der Fenster zu sehen ist, besteht der allgemeine Nachteil eines jeden Fensters darin, das Amplitudenspektrum des endlichen Signals zu verfälschen.

1.2 Berechnung des Amplitudenspektrums

In diesem Aufgabenteil sollen die Amplitudenspektren dreier .wav-Dateien berechnet und dargestellt werden. Für die Berechnung steht in Matlab der Befehl `fft()` zur Verfügung. *FFT* steht für die *Fast Fourier Transform* (schnelle Fourier-Transformation), welche eine schnelle Berechnung des Spektrums meist mit dem sogenannten *Radix-2-FFT-Algorithmus* ermöglicht. Während bei der Berechnung des Amplitudenspektrums nach Gleichung 1.4 der Rechenaufwand mit der Länge des Signals quadratisch ansteigt, zerlegt der FFT-Algorithmus das Signal in Signalstücke der Länge 2, wodurch das Spektrum wesentlich schneller berechnet werden kann. Die genaue Funktionsweise des Algorithmus' wird in [Wer08] gezeigt. Ein Nachteil dieser Berechnungsmethode ist die Reduzierung der Frequenzauflösung nach Gleichung 1.5, da die Anzahl der Abtastpunkte reduziert wird. Alternativ kann allerdings auch eine Erhöhung der Frequenzauflösung durch sogenanntes *Zero-Padding*