

Aufgabe 1: Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren wird u.a. bei nichtlinearen Problemen der Mechanik eingesetzt. Hierbei ergeben sich nichtlineare Gleichungen für die unbekanntes Verschiebungen eines Tragwerkes. Diese Situation tritt beispielsweise bei großen Verschiebungen und der Gleichgewichtsforderung für den deformierten Zustand. In anderen Fällen werden komplexe Materialgesetze betrachtet, in denen ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen berücksichtigt wird.

Gesucht ist die Nullstelle des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 = 0 \\g(x, y) &= x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 = 0.\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Nullstelle des nichtlinearen Gleichungssystems mit dem *Newton-Verfahren* und dem *vereinfachten Newton-Verfahren*. Programmieren Sie hierzu jeweils eine Routine in MATLAB.

Schreiben Sie eine Funktion

$$\text{function}[x] = \text{newton}(x0, y0, TOL, NMAX)$$

bzw.

$$\text{function}[x] = \text{vernewton}(x0, y0, TOL, NMAX)$$

Realisieren Sie die Iteration mit einer *while*-Schleife. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die euklidische Norm des Residuums $\|\underline{R}(\underline{x}^{(k)})\|$ kleiner als eine vorgegebene Toleranz TOL ist oder die maximale Anzahl der zulässigen Iterationen $NMAX$ erreicht ist

$$\|\underline{R}(\underline{x}^{(k)})\| < TOL \quad \text{bzw.} \quad n > NMAX.$$

Implementieren Sie zur visuellen Kontrolle den Plot der euklidischen Norm des Residuums $\|\underline{R}(\underline{x}^{(k)})\|$ über die Anzahl k der durchgeführten Iterationen.

Rufen Sie die Funktion auf und berechnen Sie die Nullstellen für $NMAX = 20$ und verschiedene sinnvollgewählte Toleranzen TOL (z.B. $TOL = 10^{-3} - 10^{-10}$). Starten Sie das *Newton-Verfahren* und das *vereinfachte Newton-Verfahren* mit der Startnäherung $x^{(0)} = 0.6$, $y^{(0)} = 0.25$. Führen Sie zum Vergleich zusätzlich das *vereinfachte Newton-Verfahren* mit den Startwerten $x^{(0)} = 0.3$, $y^{(0)} = 0.1$ durch. Wie verändert sich die Konvergenz der Iteration?

Aufgabe 2: Numerische Integration

Die exakte Integration ist für viele Problemstellungen der Mechanik analytisch nur mit einem sehr großen Aufwand berechenbar. Daher wird in der Numerik die numerische Integration eingesetzt, die bei einer geeigneten Wahl der algorithmischen Details den Integralwert mit hinreichender Genauigkeit berechnen kann.

Gegeben sie die folgenden Funktionen

$$f_1(x) = 3x^2 + 4x + 5$$

$$f_2(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 10$$

$$f_3(x) = 10x^4 + 3x^2 + 2x + 3.$$

Die Funktionen sollen im Intervall von $[-1, 1]$ mit Hilfe der *Gauß-Integration* numerische integriert werden

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

Programmieren Sie hierfür eine Routine in MATLAB in der Form

$$function[a] = gauss(f, n).$$

Die Funktion f soll als *inline*- Funktion übergeben werden, n bezeichnet die Anzahl der Gaußpunkte. Bestimmen Sie die Integrale zunächst numerisch unter Anwendung der MATLAB-Routine. Testen Sie die Funktion mit 1, 2 und 3 Gaußpunkten. Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der analytischen Lösung. Was stellen Sie fest?